Funktionen u. Folgen I

monoton wachsend: | ↯ fallend
für alle $x, y \in D$ mit $x<y$ gilt $f(x) \leq f(y)$

streng monoton wachsend:
für alle $x, y \in D$ mit $x<y$ gilt $f(x) < f(y)$

eine **streng monotone Funktion ist injektiv**

reelle Folge $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad n \mapsto a_n$ | $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Folgeglieder a_n

harmonische Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}}$

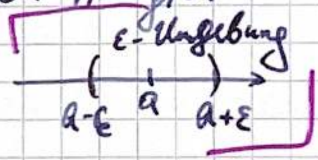
(obere/untere) Schranke

beschränkte Folge: $\forall n \in \mathbb{N}: |a_n| \leq C \qquad C \in \mathbb{R}_{\geq 0}$

konvergente Folge:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \quad \text{oder} \quad a_n \xrightarrow{n \to \infty} a \text{, sodass}$$

für jedes reelle $\varepsilon > 0$: für alle großen n gilt
$|a_n - a| < \varepsilon$



konvergent ⇒ beschränkt
monoton ∧ beschränkt ⇒ konvergent

monoton ∧ unbeschränkt ⇒ bestimmt divergent

Grenzwertsätze
für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ u. $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ u. $b = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$:

$$\lim_{n \to \infty} (a_n + b_n) = a + b$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

$$\lim_{n \to \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Funktionen u. Folgen II

bestimmt divergent gegen $+\infty$:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = \infty}$$

für Polynome p, q gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \operatorname{grad}(p) < \operatorname{grad}(q) \\ \text{Quotient d. größten Koeff.} & \text{falls } \operatorname{grad}(p) = \operatorname{grad}(q) \\ \left(\text{VZ d. größten Koeff.}\right) \cdot \infty & \text{falls } \operatorname{grad}(p) > \operatorname{grad}(q) \end{cases}$$

~~Für $f: \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}$ hat f für x gegen x_0 den Grenzwert y_0, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D gilt $x_n \neq x_0$ u. $\lim_x$~~

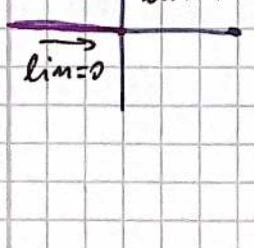
$f: D \to \mathbb{R}$.

f hat für x gegen x_0 den Grenzwert y_0, wenn für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D, deren Folgeglieder $x_n \neq x_0$ sind und die gegen x_0 konvergiert, konvergiert die Folge der Funktionswerte $y_n = f(x_n)$ gegen y_0,

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = y_0}$$

bzw. $$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0}$$

Heaviside-Fnkt.



→ kein Grenzwert für $x=0$!

Funktionen u. Folgen III

stetig in $x_0 \in D$:
- $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ existiert
- $\boxed{\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$

stetig: stetig in jedem $x_0 \in D$

- Polynome: stetig
- gebrochen rationale Fkt auf ihrem D: stetig
- exp, ln, sin, cos: stetig
- $f_1: D_1 \to \mathbb{R}$, $f_2: D_2 \to \mathbb{R}$, $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$:

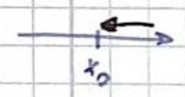
  $f_1 + f_2$, $f_1 \cdot f_2$ stetig auf $D_1 \cap D_2$

  $\frac{f_1}{f_2}$ stetig auf $D_1 \cap D_2 \setminus \{x \in D_2 \mid f_2(x) = 0\}$
- $f_1: D_1 \to \mathbb{R}$, $f_2: D_2 \to \mathbb{R}$, $f(D_1) \subset D_2$:

  $g \circ f: D_1 \to \mathbb{R}$ stetig

rechtsseitiger Grenzwert

$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \searrow x_0} f(x) = y_0}$ $\boxed{x_n > x_0}$



linksseitiger Grenzwert

$\boxed{\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow x_0} f(x) = y_0}$ $\boxed{x_n < x_0}$